Cohomologie syntomique: liens avec les cohomologies étale et rigide

Jean-Yves Etesse

Cohomologie syntomique : liens avec les cohomologies étale et rigide

Jean-Yves ETESSE [1]

Sommaire

[1](CNRS - Institut de Mathématique, Université de Rennes 1, Campus de Beaulieu - 35042 RENNES Cedex France)
E-mail : Jean-Yves.Etesse@univ-rennes1.fr

Résumé

La cohomologie syntomique ici définie fait le lien entre la cohomologie rigide et la cohomologie étale, en interprétant cette dernière comme points fixes du Frobenius agissant sur la première.

Soit $\mathcal{V}$ un anneau de valuation discrète complet, de corps résiduel parfait $k = \mathcal{V}/\mathfrak{m}$ de caractéristique $p > 0$ et de corps des fractions K de caractéristique 0. Après avoir défini la cohomologie syntomique à supports compacts d'un faisceau abélien $\mathcal{F}$ sur un k-schéma X, nous montrons que celle-ci coïncide avec la cohomologie étale à supports compacts lorsque $\mathcal{F}$ est un faisceau lisse. Si de plus le F-isocristal convergent associé au faisceau lisse $\mathcal{F}$ provient d'un isocristal surconvergent E, alors la cohomologie rigide de E s'exprime elle aussi comme limite de cohomologies syntomiques : la cohomologie étale à supports compacts de $\mathcal{F}$ est alors les points fixes du Frobenius agissant sur la cohomologie rigide de E.

Abstract

Syntomic cohomology here defined yields a link between rigid cohomology and etale cohomology, viewing the last one as the fixed points under Frobenius of the former one.

Let $\mathcal{V}$ be a complete discrete valuation ring, with perfect residue field $k = \mathcal{V}/\mathfrak{m}$ of characteristic $p > 0$ and fraction field K of characteristic 0. Having defined syntomic cohomology with compact supports of an abelian sheaf $\mathcal{F}$ on a k-scheme X, we show that it coincides with etale cohomology with compact supports when $\mathcal{F}$ is a lisse sheaf. If moreover the convergent F-isocrystal associated to $\mathcal{F}$ comes from an overconvergent isocrystal E, then the rigid cohomology of E expresses as a limit of syntomic cohomologies : then the etale cohomology with compact supports of $\mathcal{F}$ is the fixed points of Frobenius acting on the rigid cohomology of E.

2000 Mathematics Subject Classification : 14F20, 14F30, 14G22.

Mots clés : cohomologie syntomique, F- isocristaux convergents, F- isocristaux surconvergents, cohomologie cristalline, cohomologie rigide.

Key words : syntomic cohomology, convergent F- isocrystals, overconvergent F- isocrystals, crystalline cohomology, rigid cohomology.

Introduction

La cohomologie syntomique introduite dans cet article fait le lien entre la cohomologie étale et la cohomologie rigide, lien qui sera utilisé ultérieurement pour résoudre une conjecture de Katz sur les zéros et pôles unités p-adiques des fonctions L.

Comme pour le topos étale [Mi, II, theo 3.10] on obtient au §1 une description du topos syntomique [théo (1.3)] calquée sur celle de [SGA 4,T 1, IV, théo (9.5.4)], SGA 4 qui travaille en termes de sous-topos ouvert et du sous-topos fermé complémentaire. On en déduit les suites exactes courtes usuelles de localisation [théo (1.5)].

Au §2 la cohomologie syntomique à supports compacts est définie : en particulier il faut s'assurer de l'indépendance par rapport à la compactification choisie [prop (2.1)]. Les suites exactes courtes de localisation du §1 fournissent alors la suite exacte longue de localisation en cohomologie syntomique à supports compacts [théo (2.6)].

Au §3 on établit que les cohomologies syntomique et étale à supports compacts d'un faisceau lisse $\mathcal{F}$ coïncident [théo (3.2)]. De même la cohomologie rigide à supports compacts d'un F-isocristal surconvergent unité E associé à $\mathcal{F}$ coïncide avec une limite de la cohomologie syntomique à supports compacts d'un $E_n^{m\text{-}cris}$ associé à $\mathcal{F}$ [théo (3.3.13)(1) et (3.3.16)]. Comme il existe une suite exacte courte sur le site syntomique qui relie $\mathcal{F}$ et $E_n^{m\text{-}cris}$ [théo (3.3.12)], on en déduit que la cohomologie étale à supports compacts de $\mathcal{F}$ s'identifie aux points fixes du Frobenius agissant sur la cohomologie rigide à supports compacts de E [théo(3.3.13) (2) et (3)].

1. Site syntomique

1.1. Si X est un schéma quelconque, le gros site syntomique de X est défini comme suit [SGA 3, IV, 6.3] : la catégorie sous-jacente est celle des schémas sur X et la topologie est engendrée par les familles finies surjectives de morphismes syntomiques (i.e. plats et localement intersection complète). On rappelle que les morphismes syntomiques sont ouverts, demeurent syntomiques par changement de base, et sont localement relevables le long d'une immersion fermée. Le gros site (resp. petit site) syntomique de X sera noté $SYNT(X)$ (resp. $synt(X)$) et le topos correspondant X_{SYNT} (resp. X_{synt}) :

lorsqu'on ne voudra pas distinguer entre les deux situations on notera $\mathcal{T}(X)$ (resp. $X_{\mathcal{T}}$) l'un ou l'autre de ces deux sites (resp. topos).

Soit $j : U \hookrightarrow X$ une immersion ouverte ; j définit un couple de foncteurs adjoints (j_*, j^{-1})

$$U_{\mathcal{T}} \underset{j_*}{\overset{j^{-1}}{\leftrightarrows}} X_{\mathcal{T}}.$$

Dans la suite $X_{\mathcal{T}}$ sera annelé par un faisceau d'anneaux $\mathcal{A}$ et $U_{\mathcal{T}}$ sera annelé par $j^{-1}\mathcal{A}$, noté $\mathcal{A}_{|U}$: on note ${}_{\mathcal{A}}X_{\mathcal{T}}$ (resp. ${}_{\mathcal{A}|U}U_{\mathcal{T}}$) la catégorie des faisceaux des $\mathcal{A}$-modules à gauche sur $X_{\mathcal{T}}$ (resp. des $\mathcal{A}_{|U}$-modules à gauche sur $U_{\mathcal{T}}$). Le foncteur

$$j^* : \ {}_{\mathcal{A}}X_{\mathcal{T}} \longrightarrow \ {}_{\mathcal{A}|U}U_{\mathcal{T}}$$

admet un adjoint à gauche $j_!$ [Mi, II, Rk 3.18] et [SGA 4, IV, § 14] défini par

$$(1.1.1) \begin{cases} j_!(\mathcal{F})(X') = \mathcal{F}(X') \text{ si } X' \longrightarrow X \text{ se factorise par } U \\ \text{et } j_!(\mathcal{F})(X') = 0 \text{ sinon}\,; \end{cases}$$

$j_!$ est exact [loc. cit].

Remarquons que j^* est exact puisqu'il admet un adjoint à droite et un adjoint à gauche.

De même si $i : Z \hookrightarrow X$ est une immersion fermée, i définit un couple de foncteurs adjoints (i_*, i^{-1}) :

$$Z_{\mathcal{T}} \underset{i_*}{\overset{i^{-1}}{\leftrightarrows}} X_{\mathcal{T}} \ ;$$

$Z_{\mathcal{T}}$ sera annelé par $i^{-1}\mathcal{A}$, noté $\mathcal{A}_{|Z}$.

Le foncteur

$$i^* : \ {}_{\mathcal{A}}X_{\mathrm{SYNT}} \longrightarrow \ {}_{\mathcal{A}|Z}Z_{\mathrm{SYNT}}$$

admet un adjoint à gauche $i_!$ [Mi, II, Rk 3.18] et $i_!$ est exact [loc. cit.] : en particulier

$$i^* : \ {}_{\mathcal{A}}X_{\mathrm{SYNT}} \longrightarrow \ {}_{\mathcal{A}|Z}Z_{\mathrm{SYNT}}$$

est exact.
Le foncteur

$$i^* : \ {}_{\mathcal{A}}X_{\mathrm{synt}} \longrightarrow \ {}_{\mathcal{A}|Z}Z_{\mathrm{synt}}$$

est lui aussi exact grâce à [Mi, II, 2.6 et 3.0 p 68] et [EGA 0_I, 1.4.12] car les morphismes syntomiques demeurent syntomiques par changement de base.
De plus le foncteur

$$i_* : {}_{\mathcal{A}|Z}Z_{\mathcal{T}} \longrightarrow {}_{\mathcal{A}}X_{\mathcal{T}}$$

est exact, car tout morphisme syntomique se relève, localement le long d'une immersion fermée, en un morphisme syntomique.

1.2. Soient $i : Z \hookrightarrow X$ une immersion fermée, et $j : U \hookrightarrow X$ l'immersion ouverte du complémentaire de Z. Pour un X-schéma X' on note $U' = X' \times_X U$, $Z' = X' \times_X Z$; tout recouvrement syntomique $W \twoheadrightarrow Z'$ se relève localement en $\tilde{W} \to X'$ syntomique : pour alléger l'écriture on supposera le relèvement global. Par suite, si $\tilde{U} \twoheadrightarrow U'$ est surjectif syntomique et $\tilde{W}$ tel que ci-dessus, alors $(\tilde{U}, \tilde{W})$ est un recouvrement syntomique de X'.

Lemme (1.2.1). *Avec les notations de (1.2) et pour $\mathcal{F} \in {}_{\mathcal{A}}X_{\mathcal{T}}$ le carré suivant, où les flèches sont les flèches canoniques*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d] & j_*j^*(\mathcal{F}) \arrow[d] \\
i_*i^*(\mathcal{F}) \arrow[r] & i_*j_*j^*(\mathcal{F})
\end{tikzcd}$$

est cartésien.

Démonstration. On notera $\mathcal{G}$ le produit fibré.
Pour un X-schéma X' on considère un recouvrement $(\tilde{U}, \tilde{W})$ de X' du type précédent : comme $\tilde{U} \to X'$ et $\tilde{W} \to X'$ sont deux morphismes syntomiques, on est ramené à établir l'isomorphisme $\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}$ au-dessus d'un X'-schéma syntomique $\tilde{W}$; la démonstration se fait donc sur le petit site de X'. On pose $W = \tilde{W} \times_{X'} Z'$.

Le faisceau $j_*j^*(\mathcal{F})$ est le faisceau associé au préfaisceau

$$\tilde{W} \longmapsto \mathcal{F}(V) \qquad , \quad \text{avec } V := \tilde{W} \times_{X'} U',$$

et $i_*i^*(\mathcal{F})$ est le faisceau associé au préfaisceau

$$\tilde{W} \longmapsto \varinjlim_{\mathcal{W}'} \mathcal{F}(\mathcal{W}') \ ,$$

la limite étant prise sur les diagrammes commutatifs

$$
(1.2.2)\qquad
\begin{tikzcd}
\tilde{W} \arrow[d] & W' \arrow[l] & W \arrow[l] \arrow[d] \\
X' & & Z' \arrow[ll]
\end{tikzcd}
$$

avec $W' \to \tilde{W}$ syntomique.
De même $i_* i^* j_* j^*(\mathcal{F})$ est le faisceau associé au préfaisceau

$$\tilde{W} \longmapsto \varinjlim_{W'} \mathcal{F}(\mathcal{W}' \times_{\tilde{W}} V) = \varinjlim_{W'} \mathcal{F}(\mathcal{W}' \times_{X'} U'),$$

avec W' comme en (1.2.2). On remarque alors que (V, W') est un recouvrement syntomique de $\tilde{W}$: en effet le $\tilde{W}$-morphisme $W \to W'$ fournit une section du morphisme syntomique $W' \times_{\tilde{W}} W \to W$; ce dernier est donc surjectif et on conclut comme pour le recouvrement $(\tilde{U}, \tilde{W})$ de X'.
Ainsi on a bien un isomorphisme $\mathcal{F} \tilde{\to} \mathcal{G}$ au-dessus de $\tilde{\mathcal{W}}$, d'où le lemme. $\square$

Notons $\mathbb{T}({}_{\mathcal{A}}X_{\mathcal{T}})$ la catégorie des triplets $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \alpha)$ où $\mathcal{F}_1 \in_{\mathcal{A}|Z} Z_{\mathcal{T}}$, $\mathcal{F}_2 \in {}_{\mathcal{A}|U}U_{\mathcal{T}}$ et α est un morphisme $\alpha : \mathcal{F}_1 \to i^* j_* \mathcal{F}_2$; les morphismes entre deux tels triplets sont définis de la manière naturelle, analogue à [Mi, II, § 3].

Théorème(1.3). *Soient $i : Z \hookrightarrow X$ une immersion fermée de schémas et $j : U \hookrightarrow X$ l'immersion ouverte du complémentaire de Z. Le foncteur*

$$\mathcal{F} \longmapsto (i^*\mathcal{F}, j^*\mathcal{F}, \alpha)$$

où α est le morphisme canonique $\alpha : i^*\mathcal{F} \to i^* j_* j^* \mathcal{F}$, induit une équivalence de catégories entre ${}_{\mathcal{A}}X_{\mathcal{T}}$ et $\mathbb{T}({}_{\mathcal{A}}X_{\mathcal{T}})$.

Démonstration. La démonstration est analogue à celle de Fontaine-Messing [F-M, 4.4]. Le théorème résulte du lemme (1.2.1) par la même méthode que pour le site étale [Mi, II, theo 3.10]. $\square$

En identifiant ${}_{\mathcal{A}}X_{\mathcal{T}}$ et $\mathbb{T}({}_{\mathcal{A}}X_{\mathcal{T}})$ via le théorème (1.3) on définit six foncteurs

$$
(1.4)\qquad
\begin{tikzcd}
{}_{\mathcal{A}|Z}Z_{\mathcal{T}} \arrow[r, "i_*"] & {}_{\mathcal{A}}X_{\mathcal{T}} \arrow[l, bend right, "i^*"'] \arrow[l, bend left, "i^!"] \arrow[r, "j^*"] & {}_{\mathcal{A}}U_{\mathcal{T}} \arrow[l, bend right, "j_!"'] \arrow[l, bend left, "j_*"]
\end{tikzcd}
$$

dont la description est la suivante :
$i^* : \mathcal{F}_1 \leftarrow (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \alpha : \mathcal{F}_1 \to i^* j_* \mathcal{F}_2)$, $j_! : (0, \mathcal{F}_2, 0) \leftarrow \mathcal{F}_2$
$i_* : \mathcal{F}_1 \mapsto (\mathcal{F}_1, 0, 0)$, $j^* : (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \alpha : \mathcal{F}_1 \to i^* j_* \mathcal{F}_2) \mapsto \mathcal{F}_2$
$i^! : \mathrm{Ker}\alpha \leftarrow (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \alpha : \mathcal{F}_1 \to i^* j_* \mathcal{F}_2)$,
$j_* : (i^* j_* \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_2, id : i^* j_* \mathcal{F}_2 \to i^* j_* \mathcal{F}_2) \leftarrow \mathcal{F}_2$.

Théorème(1.5). *Avec les notations précédentes on a :*

(1) Chaque foncteur est adjoint à gauche de celui écrit la ligne au-dessous ; en particulier on a un isomorphisme de transitivité $(j_1 j_2)_! = j_{1!} j_{2!}$.

(2) Les foncteurs $i^*, i_*, j^*, j_!$ *sont exacts ; les foncteurs* j_*, $i^!$ *sont exacts à gauche.*

(3) Les composés $i^* j_!, i^! j_!, i^! j_*, j^* i_*$ *sont nuls.*

(4) Les foncteurs i_*, j_* *et* $j_!$ *sont pleinement fidèles.*

(5) Les foncteurs $j_*, j^*, i^!, i_*$ *envoient les injectifs sur les injectifs.*

(6) Pour tout $\mathcal{F} \in_{\mathcal{A}} X_{\mathcal{T}}$ *(resp.* $\mathcal{F} \in_{\mathcal{A}|U} U_{\mathcal{T}}$*) on a des suites exactes courtes*
(6.1) $0 \longrightarrow j_! j^* \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow i_* i^* \mathcal{F} \longrightarrow 0$
(6.2) $0 \longrightarrow i_* i^! \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow j_* j^* \mathcal{F}$
[resp. (6.3) $0 \longrightarrow j_! \mathcal{F} \longrightarrow j_* \mathcal{F} \longrightarrow i_* i^* j_* \mathcal{F} \longrightarrow 0$].

De plus le couple de foncteurs (i^*, j^*) *est conservatif.*

Démonstration.

Le *(1)* et le *(2)* ont déjà été vus, et l'isomorphisme de transitivité $(j_1 j_2)_! = j_{1!} j_{2!}$ résulte de la formule $(j_1 j_2)^* = j_2^* j_1^*$.

Le *(3)* et le *(4)* résultent des descriptions (1.4).

Le *(5)* résulte de *(1)* et *(2)* et du fait qu'un foncteur avec un adjoint à gauche exact préserve les injectifs [Mi, III, 1.2].

La suite *(6.3))* provient de *(6.1)* en remarquant que $j^* j_* \mathcal{F} = \mathcal{F}$.

Compte tenu des identifications (1.4) la suite *(6.1)* s'écrit

$$0 \longrightarrow (0, j^* \mathcal{F}, 0) \longrightarrow (i^* \mathcal{F}, j^* \mathcal{F}, \alpha) \longrightarrow (i^* \mathcal{F}, 0, 0) \longrightarrow 0.$$

Pour démontrer qu'elle est exacte il nous suffit donc de montrer qu'une suite de ${}_{\mathcal{A}} X_{\mathcal{T}}$

(6.4) $$0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$$

est exacte si et seulement si les suites

(6.5) $$0 \longrightarrow i^*(\mathcal{F}') \longrightarrow i^*(\mathcal{F}) \longrightarrow i^*(\mathcal{F}'') \longrightarrow 0$$

$$\textit{(6.6)} \qquad 0 \longrightarrow j^*(\mathcal{F}') \longrightarrow j^*(\mathcal{F}) \longrightarrow j^*(\mathcal{F}'') \longrightarrow 0$$

de ${}_{\mathcal{A}|Z}Z_{\mathcal{T}}$ et ${}_{\mathcal{A}|U}U_{\mathcal{T}}$ respectivement, sont exactes, i.e. que le couple de foncteurs (i^*, j^*) est conservatif.

L'exactitude de *(6.4)* entraîne celle de *(6.5)* et *(6.6)* puisque i^* et j^* sont exacts.

Réciproquement, l'exactitude de *(6.5)* et *(6.6)* entraîne celle des suites

$$\textit{(6.7)} \qquad 0 \longrightarrow i_*i^*(\mathcal{F}') \longrightarrow i_*i^*(\mathcal{F}) \xrightarrow{\varphi_Z} i_*i^*(\mathcal{F}'') \longrightarrow 0,$$

$$\textit{(6.8)} \qquad 0 \longrightarrow j_*j^*(\mathcal{F}') \longrightarrow j_*j^*(\mathcal{F}) \xrightarrow{\varphi_U} j_*j^*(\mathcal{F}''),$$

$$\textit{(6.9)} \qquad 0 \longrightarrow i_*i^*j_*j^*(\mathcal{F}') \longrightarrow i_*i^*j_*j^*(\mathcal{F}) \longrightarrow i_*i^*j_*j^*(\mathcal{F}''),$$

d'où l'exactitude de

$$\textit{(6.10)} \qquad 0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}''$$

grâce au lemme (1.2.1).

Donc pour tout $\mathcal{F} \in_{\mathcal{A}} X_{\mathcal{T}}$ on a l'exactitude de la suite

$$0 \longrightarrow j_!j^*\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow i_*i^*\mathcal{F}.$$

Montrons la surjectivité de $\rho : \mathcal{F} \to i_*i^*\mathcal{F}$. Comme pour le lemme (1.2.1), dont on utilise les notations, on est ramené au petit site de X'. Soient $\tilde{W}$ un X'-schéma syntomique, $V := \tilde{W} \times_{X'} U'$ et $s \in i_*i^*(\mathcal{F})(\tilde{W}) = \varinjlim_{W'} \mathcal{F}(W')$, où W' est comme dans (1.2.2) : il existe un W' et $s_{W'} \in \mathcal{F}(W')$ d'image s. On a vu dans la preuve du lemme (1.2.1) que (V, W') est un recouvrement syntomique de $\tilde{W}$: notons s' l'image de s par l'application restriction

$$i_*i^*\mathcal{F}(\tilde{W}) \longrightarrow i_*i^*\mathcal{F}(W')$$

$$s \mapsto s' \ ;$$

alors $s_{W'} \in \mathcal{F}(W')$ a pour image s' par ρ.

Comme $i_*i^*(\mathcal{F})(V) = 0$, tout $s_V \in \mathcal{F}(V)$ est un relèvement de s dans $i_*i^*(\mathcal{F})(V) = 0$. D'où la surjectivité de ρ, et l'exactitude de *(6.1)*.

On a alors un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & j_!j^*\mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d, "v"'] & i_*i^*\mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d, "w"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & j_!j^*\mathcal{F}'' \arrow[r] & \mathcal{F}'' \arrow[r] & i_*i^*\mathcal{F}'' \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

L'exactitude de *(6.5)* et *(6.6)* et celle des foncteurs $j_!$ et i_* prouve que u et w sont surjectifs : d'où la surjectivité de v ; jointe à l'exactitude de *(6.10)* ceci prouve que le couple (i^*, j^*) est conservatif.

L'exactitude de *(6.2)* en résulte via la description de $i^!$ fournie en (1.4). $\square$

2. Cohomologie syntomique à supports compacts

Soit X un schéma séparé de type fini sur un corps k ; on sait par Nagata que X est ouvert dans un k-schéma propre $\overline{X}$; on note $j : X \hookrightarrow \overline{X}$ l'immersion ouverte.

On se place sous les notations de (1.1) : $\overline{X}_{\mathcal{T}}$ est annelé par un faisceau d'anneaux $\mathcal{A}$ et $\mathcal{F}$ est un faisceau de $\mathcal{A}$-modules.

Si $\mathcal{F}$ est élement de ${}_{\mathcal{A}}\overline{X}_{\text{synt}}$, on notera encore $\mathcal{F}$ son image inverse dans ${}_{\mathcal{A}}\overline{X}_{\text{SYNT}}$ par le morphisme de topos $\overline{X}_{\text{SYNT}} \to \overline{X}_{\text{synt}}$ et pour tout entier $i \geqslant 0$, on a [E-LS 2, (1.2)]

$$H^i(\overline{X}_{\text{synt}}, \mathcal{F}) = H^i(\overline{X}_{\text{SYNT}}, \mathcal{F}),$$

et de même pour la topologie étale.

Proposition - Définition (2.1). *Sous les hypothèses précédentes, si $\mathcal{A}$ est de torsion et $\mathcal{F}$ un élément de ${}_{\mathcal{A}_{|X}}X_{\mathcal{T}}$, le complexe $R\Gamma(\overline{X}_{\mathcal{T}}, j_!\, \mathcal{F})$ est indépendant de la compactification $\overline{X}$ de X, et sera noté*

$$R\Gamma_{\text{synt},c}(X, \mathcal{F}) \ ;$$

ses groupes de cohomologie seront notés

$$H^i_{\mathrm{synt},c}(X, \mathcal{F})$$

et appelés groupes de cohomologie syntomique à supports compacts.

Démonstration. Si

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, hook, "j'"] \arrow[dr] & & \overline{X}' \arrow[dl] \\ & \mathit{Spec}\ k & \end{tikzcd}$$

est une autre compactification de X, on note $\overline{X}''$ l'image schématique de X plongé diagonalement dans $\overline{X} \times_k \overline{X}'$, $j'' : X \hookrightarrow \overline{X}''$ l'immersion ouverte et $g : \overline{X}'' \to \overline{X}$, $g' : \overline{X}'' \to \overline{X}'$ les deux projections (propres).

Il s'agit de montrer que

$$R\Gamma(\overline{X}_{\mathcal{T}}, j_!\, \mathcal{F}) = R\Gamma(\overline{X}''_{\mathcal{T}}, j''_!\, \mathcal{F}). \tag{2.2}$$

Ceci va résulter de la proposition plus générale suivante.

Proposition (2.3). *Supposons donné un carré cartésien de k-schémas*

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, hook, "j'"] \arrow[d, "f"'] & \overline{X}' \arrow[d, "\overline{f}"] \\ X \arrow[r, hook, "j"] & \overline{X} \end{tikzcd} \quad ,$$

où $\overline{X}$ est propre sur k, $\overline{f}$ est propre, j, j' sont des immersions ouvertes. Si $\mathcal{F}$ est un faisceau abélien de torsion sur $X'_{\mathcal{T}}$, alors on a des isomorphismes

$$\begin{aligned} R\Gamma(\overline{X}_{\mathcal{T}}, j_!\, Rf_*\, \mathcal{F}) &\simeq R\Gamma(\overline{X}_{\mathcal{T}}, R\overline{f}_*\, j'_!\, \mathcal{F}) \\ &\simeq R\Gamma(\overline{X}'_{\mathcal{T}}, j'_!\, \mathcal{F}). \end{aligned}$$

En effet (2.1) résulte de (2.3) via le lemme suivant :

Lemme (2.4). *Si*

$$\begin{tikzcd}
 & \overline{X}'' \arrow[dd, "g"] \\
X \arrow[ur, hook, "j''"] \arrow[dr, hook, "j"'] & \\
 & \overline{X}
\end{tikzcd}$$

est un triangle commutatif de schémas, avec j, j'' *des immersions ouvertes dominantes, alors* X *est le produit fibré* $X \times_{\overline{X}} \overline{X}''$.

Démonstration de (2.4). Soit U'' le produit fibré

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "\varphi"] \arrow[drr, bend left, "j''"] \arrow[ddr, bend right, "\mathrm{id}"'] & & \\
 & U'' \arrow[r, hook, "\overline{j}"'] \arrow[d, "f"] & \overline{X}'' \arrow[d, "g"] \\
 & X \arrow[r, hook, "j"'] & \overline{X}
\end{tikzcd} .$$

Puisque $f \circ \varphi = \mathrm{id}$, φ est une immersion fermée [EGA I, (4.3.6) (iv)] ; or φ est étale, car $\tilde{j} \circ \varphi = j''$ et $\tilde{j}$, j'' sont étales [EGA IV, (17.3.5)]. Ainsi φ est une immersion ouverte [EGA IV, (17.9.1) ; EGA I, 4.2]. De plus φ est dominante car j'' l'est ; donc φ est surjective, car φ est finie. Une immersion ouverte surjective est un isomorphisme. □

Démonstration de (2.3). Faisons la démonstration dans le cas des gros topos syntomiques : pour les petits topos cela résulte de l'égalité

$$H^i(\overline{X}_{\mathrm{SYNT}}, \mathcal{G}) = H^i(\overline{X}_{\mathrm{synt}}, \mathcal{G})$$

valable pour tout faisceau abélien $\mathcal{G}$ sur synt(X), et tout entier $i \geqslant 0$ [E-LS 2, 1.2] et [Mi, II, prop 3.1]. On désigne par un "ET" en indice les gros topos étales [E-LS 2, § 1].

On a un cube commutatif de morphismes de gros topos

$$
\begin{tikzcd}
 & X'_{\mathrm{SYNT}} \arrow[rr, hook, "j'_{\mathrm{SYNT}}"] \arrow[dl, "\beta_{X'}"'] \arrow[dd, dotted, "f_{\mathrm{SYNT}}" near end] & & \overline{X}'_{\mathrm{SYNT}} \arrow[dl, "\beta_{\overline{X}'}"] \arrow[dd, "\overline{f}_{\mathrm{SYNT}}"] & & \\
X'_{\mathrm{ET}} \arrow[rr, hook, "j'_{\mathrm{ET}}" near end] \arrow[dd, "f_{\mathrm{ET}}"'] & & \overline{X}'_{\mathrm{ET}} \arrow[dd, "\overline{f}_{\mathrm{ET}}" near start] & & & \\
 & X_{\mathrm{SYNT}} \arrow[rr, hook, dotted, "j_{\mathrm{SYNT}}"' near end] \arrow[dl, dotted, "\beta X"'] & & \overline{X}_{\mathrm{SYNT}} \arrow[dl, "\beta_{\overline{X}}"] & & Z_{\mathrm{SYNT}} \arrow[ll, "i_{\mathrm{SYNT}}"'] \arrow[dl, "\beta_Z"] \\
X_{\mathrm{ET}} \arrow[rr, hook, "j_{\mathrm{ET}}"'] & & \overline{X}_{\mathrm{ET}} & & Z_{\mathrm{ET}} \arrow[ll, "i_{\mathrm{ET}}"] &
\end{tikzcd}
$$

où $Z = \overline{X} \setminus X$, et un isomorphisme

$$R\Gamma(\overline{X}_{\mathrm{SYNT}},\ j_!\ Rf_{\mathrm{SYNT}^*}\ \mathcal{F}) \simeq R\Gamma(\overline{X}_{\mathrm{ET}}, R\beta_{\overline{X}^*}\ j_{\mathrm{SYNT}\,!}\ Rf_{\mathrm{SYNT}^*}\ \mathcal{F}).$$

Supposons établie la proposition suivante :

Proposition (2.5). *Avec les notations précédentes, annelons $\overline{X}_{SYNT}$ par $\mathcal{A}$ et $\overline{X}_{ET}$ par $\mathcal{B} = \beta_{\overline{X}^*}\mathcal{A}$. Alors pour tout $\mathcal{H} \in {}_{\mathcal{A}|X}X_{SYNT}$ on a un isomorphisme*

$$j_{\mathrm{ET}!}\ R\beta_{X^*}(\mathcal{H}) \xrightarrow{\sim} R\beta_{\overline{X}^*}\ j_{\mathrm{SYNT}\,!}(\mathcal{H}).$$

Alors on a des isomorphismes

$$R\Gamma(\overline{X}_{\mathrm{SYNT}},\ j_!\ Rf_{\mathrm{SYNT}^*}\ \mathcal{F}) \simeq R\Gamma(\overline{X}_{\mathrm{ET}}, j_{\mathrm{ET}!}\ R\beta_{X^*}\ Rf_{\mathrm{SYNT}^*}\ \mathcal{F})$$

$$\simeq R\Gamma(\overline{X}_{\mathrm{ET}}, j_{\mathrm{ET}!}\ Rf_{\mathrm{ET}^*}\ R\beta_{X'^*}\ \mathcal{F})$$

$\simeq R\Gamma(\overline{X}_{\mathrm{ET}}, R\overline{f}_{\mathrm{ET}^*}\ j'_{\mathrm{ET}!}\ R\beta_{X'^*}\ \mathcal{F})$ [SGA 4, XVII, lemme 5.1.6] car $\mathcal{F}$ de torsion.

$\simeq R\Gamma(\overline{X}_{\mathrm{ET}}, R\overline{f}_{\mathrm{ET}^*}\ R\beta_{\overline{X}'^*}\ j'_{\mathrm{SYNT}!}\ \mathcal{F})$ [Prop (2.5)]

$$\simeq R\Gamma(\overline{X}_{\mathrm{ET}}, R\beta_{\overline{X}^*}\ R\overline{f}_{\mathrm{SYNT}^*}\ j'_{\mathrm{SYNT}!}\ \mathcal{F})$$

$$\simeq R\Gamma(\overline{X}_{\mathrm{SYNT}}, R\overline{f}_{\mathrm{SYNT}^*}\ j'_{\mathrm{SYNT}!}\ \mathcal{F})\ ;$$

d'où la proposition (2.3).

Etablissons la proposition (2.5).
Puisque $j_{\mathrm{ET}!}$ et $j_{\mathrm{SYNT}!}$ sont exacts, il suffit de montrer l'isomorphisme $j_{\mathrm{ET}!}\ \beta_{X^*} \xrightarrow{\sim} \beta_{\overline{X}^*} j_{\mathrm{SYNT}!}$.
Par le lemme du serpent appliqué au morphisme de suites exactes

(2.5.1)
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & j_{\mathrm{ET}!}\beta_{X^*}\mathcal{H} \arrow[r] \arrow[ddd, hook] & j_{\mathrm{ET}^*}\beta_{X^*}\mathcal{H}] \arrow[r] \arrow[ddd, "\simeq"] & i_{\mathrm{ET}^*}i^*_{\mathrm{ET}}j_{\mathrm{ET}^*}\beta_{X^*}\mathcal{H} \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & 0 \\
 & & & i_{\mathrm{ET}^*}i^*_{\mathrm{ET}}\beta_{\overline{X}^*}j_{\mathrm{SYNT}^*}\mathcal{H} \arrow[d] & \\
 & & & i_{\mathrm{ET}^*}\beta_{Z^*}i^*_{\mathrm{SYNT}}j_{\mathrm{SYNT}^*}\mathcal{H} \arrow[d, "\simeq"] & \\
0 \arrow[r] & \beta_{\overline{X}^*}j_{\mathrm{SYNT}!}\mathcal{H} \arrow[r] & \beta_{\overline{X}^*}j_{\mathrm{SYNT}^*}\mathcal{H} \arrow[r] & \beta_{\overline{X}^*}i_{\mathrm{SYNT}^*}i^*_{\mathrm{SYNT}}j_{\mathrm{SYNT}^*}\mathcal{H}\ , &
\end{tikzcd}$$

il nous suffit de montrer que, pour tout faisceau $\mathcal{G}$, on a un isomorphisme

(2.5.2) $$i_{\mathrm{ET}^*}\ i^*_{\mathrm{ET}}\ \beta_{\overline{X}^*}(\mathcal{G}) \overset{\varphi}{\xrightarrow{\sim}} i_{\mathrm{ET}^*}\ \beta_{Z^*}\ i^*_{\mathrm{SYNT}}(\mathcal{G}).$$

Or $i_{\mathrm{ET}^*}\ i^*_{\mathrm{ET}}\ \beta_{\overline{X}^*}(\mathcal{G})$ est le faisceau associé au préfaisceau

$$\begin{aligned} X' \mapsto i^*_{\mathrm{ET}}\ \beta_{\overline{X}^*}(\mathcal{G})(Z \times_{\overline{X}} \overline{X}') &= \varinjlim_{X''} \beta_{\overline{X}^*}(\mathcal{G})(X'') \\ &= \varinjlim_{X''} \mathcal{G}(X'') \simeq \mathcal{G}(Z \times_{\overline{X}} \overline{X}') \end{aligned}$$

où $\overline{X}'$ est un $\overline{X}$-schéma et la limite inductive est prise sur les diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd}
X'' \arrow[d] & Z \times_{\overline{X}} \overline{X}' \arrow[l] \arrow[d] \\
\overline{X} & Z \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

où X'' est un $\overline{X}$-schéma ; comme $i_{\mathrm{ET}^*}\ \beta_{Z^*}\ i^*_{\mathrm{SYNT}}(\mathcal{G})$ a la même description, il en résulte que φ est un isomorphisme. □

Théorème (2.6). *Soient $i_1 : Z \hookrightarrow X$ une immersion fermée entre deux k-schémas séparés de type fini, $j_1 : \cup \hookrightarrow X$ l'immersion ouverte du complémentaire et $\mathcal{F} \in {}_{\mathcal{A}}X_{\mathcal{T}}$, où $\mathcal{A}$ est un faisceau d'anneaux de torsion. Alors on a une suite* *exacte longue de cohomologie syntomique à supports compacts*

$$\rightarrow H^i_{\mathrm{synt},c}(U,\mathcal{F}_{|U}) \rightarrow H^i_{\mathrm{synt},c}(U,\mathcal{F}) \rightarrow H^i_{\mathrm{synt},c}(Z,\mathcal{F}_{|Z}) \rightarrow H^{i+1}_{\mathrm{synt},c}(U,\mathcal{F}_{|U}) \rightarrow$$

Démonstration. Choisissons une compactification $\overline{X}$ de X au-dessus de k, $\overline{j} : X \hookrightarrow \overline{X}$ l'immersion ouverte dominante et soit $\overline{Z}$ l'adhérence schématique de Z dans $\overline{X}$. On a alors un diagramme commutatif à carrés cartésiens

(2.6.1)
$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, hook, "\overline{j}'"] \arrow[d, hook, "i_1"'] & \overline{Z} \arrow[d, hook, "i"] \\
X \arrow[r, hook, "\overline{j}"'] & \overline{X} \\
U \arrow[u, hook, "j_1"] \arrow[r, equal] & U \arrow[u, hook, "j"']
\end{tikzcd}$$

où i est une immersion fermée et j, $\overline{j}'$ des immersions ouvertes.
En appliquant le foncteur exact $\overline{j}_!$ à la suite exacte

$$0 \longrightarrow j_{1!}\, j_1^*\, \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow\; i_{1*}\, i_1^*\, \mathcal{F} \longrightarrow 0,$$

on obtient la suite exacte

(2.6.2) $$0 \longrightarrow j_!\, j_1^*\, \mathcal{F} \longrightarrow \overline{j}_!\, \mathcal{F} \longrightarrow \overline{j}_!\, i_{1*}\, i_1^*\, \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

car $\overline{j}_!\, j_{1!} = j_!$ [Théo (1.5) (1)]. Or l'exactitude des foncteurs i_{1*} et i_*, jointe à la proposition (2.3), donne un isomorphisme

$$R\Gamma(\overline{X}_{\mathcal{T}}, \overline{j}_!\, i_{1*}\, i_1^*\, \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} R\Gamma(\overline{Z}_{\mathcal{T}}, \overline{j}'_!\, i_1^*\, \mathcal{F}) \; ;$$

ainsi, par application du foncteur $R\Gamma(\overline{X}_{\mathcal{T}}, -)$ à la suite exacte (2.6.2) on obtient, via (2.1), un triangle distingué

(2.6.3) $$R\Gamma_{\mathrm{synt},c}(U,\mathcal{F}_{|U}) \longrightarrow R\Gamma_{\mathrm{synt},c}(X,\mathcal{F}) \longrightarrow R\Gamma_{\mathrm{synt},c}(Z,\mathcal{F}_{|Z}),$$

qui fournit à son tour la suite exacte longue du théorème. $\square$

3. Comparaison avec la cohomologie étale et la cohomologie rigide

3.0. On suppose dans ce § 3 que le corps k contient $\mathbb{F}_q$, $q = p^a$. On désigne par $C(k)$ un anneau de Cohen de k de caractéristique 0 et par K_0 le corps des fractions de $C(k)$.

Comme en [Et 3, III (3.3)] ou [Et 5, (3.3)], $\mathcal{V}$ est un anneau de valuation discrète complet, d'uniformisante π et $\sigma : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ un relèvement de la puissance q de k tel que $\sigma(\pi) = \pi$ construit via [Et 2, 1.1].

On note e l'indice de ramification de $\mathcal{V}$, $K = \mathrm{Frac}(\mathcal{V})$, $\mathcal{V}^\sigma = \mathrm{Ker}\{1 - \sigma : \mathcal{V} \to \mathcal{V}\}$, $\mathcal{V}_n = \mathcal{V}/\pi^{n+1}\mathcal{V}$, $\mathcal{V}_n^\sigma = \mathcal{V}^\sigma/\pi^{n+1}\mathcal{V}^\sigma$ et $K^\sigma = \mathrm{Frac}(\mathcal{V}^\sigma)$.

Si X est un schéma on dit qu'un $\mathcal{V}_n^\sigma$-module $\mathcal{F}$ sur ét(X) est localement trivial (on dit aussi constant-tordu constructible ou encore localement constant constructible) s'il est localement isomorphe à une somme directe finie de copies de $\mathcal{V}_n^\sigma$: c'est alors la même chose de dire qu'il est localement trivial sur SYNT(X) [E-LS 2, 5.1].

Un $\mathcal{V}^\sigma$-faisceau lisse $\mathcal{F}$ (localement libre de rang fini) sur X est un système projectif $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où, pour tout n, $\mathcal{F}_n$ est un $\mathcal{V}_n^\sigma$-module localement trivial sur ét(X) et pour $n' \geqslant n$, $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_{n'} \otimes \mathcal{V}_n^\sigma$. Les K^σ-faisceaux lisses sont les $\mathcal{V}^\sigma$-faisceaux lisses à isogénie près.

Pour un $\mathcal{V}^\sigma$-faisceau lisse $\mathcal{F}$ (resp. un K^σ-faisceau lisse $\mathcal{F}_\mathbb{Q}$) sur X on pose, pour tout entier $i \geqslant 0$

$$H^i_{\mathrm{synt},c}(X, \mathcal{F}) := \varprojlim_n H^i_{\mathrm{synt},c}(X, \mathcal{F}_n)$$

[resp. $$H^i_{\mathrm{synt},c}(X, \mathcal{F}_\mathbb{Q}) = (\varprojlim_n H^i_{\mathrm{synt},c}(X, \mathcal{F}_n)) \otimes_{\mathcal{V}^\sigma} K^\sigma] \ .$$

Proposition (3.1). *Soient X un schéma et $\mathcal{F}$ un faisceau abélien sur ét(X) ; on note encore $\mathcal{F}$ son image inverse par le morphisme de topos $X_{synt} \to X_{ét}$. Alors, pour tout entier $i \geqslant 0$, on a un isomorphisme*

$$H^i_{\mathrm{ét},c}(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} H^i_{\mathrm{synt},c}(X, \mathcal{F}).$$

Démonstration. Résulte de [E-LS 2, 1.3]. □

Théorème (3.2). *Supposons k séparablement clos. Soient X un k-schéma séparé de type fini, $\mathcal{F}_{\mathbb{Q}}$ un K^σ-faisceau lisse sur X et $f : Y \to X$ sur k-morphisme fini étale galoisien de groupe G. Alors, pour tout entier $i \geqslant 0$, on a des isomorphismes de K^σ-espaces vectoriels de dimension finie*

$$H^i_{\text{ét},c}(X, \mathcal{F}_{\mathbb{Q}}) \simeq H^i_{\text{ét},c}(X, f_* f^* \mathcal{F}_{\mathbb{Q}})^G \simeq H^i_{\text{ét},c}(Y, f^* \mathcal{F}_{\mathbb{Q}})^G$$

$$\simeq H^i_{\text{synt},c}(X, \mathcal{F}_{\mathbb{Q}}) \simeq H^i_{\text{synt},c}(X, f_* f^* \mathcal{F}_{\mathbb{Q}})^G \simeq H^i_{\text{synt},c}(Y, f^* \mathcal{F}_{\mathbb{Q}})^G.$$

Démonstration. Compte tenu de (3.1) il suffit de montrer l'assertion pour la cohomologie étale. Puisque f est fini, f_* est exact, et on est ramené à montrer l'isomorphisme

(3.2.1) $$H^i_{\text{ét},c}(X, \mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{V}^\sigma} K^\sigma \simeq [H^i_{\text{ét},c}(X, f_* f^* \mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{V}^\sigma} K^\sigma]^G$$

pour un $\mathcal{V}^\sigma$-faisceau lisse $\mathcal{F}$.
Comme $\mathcal{F}$ est localement libre on établit le lemme suivant comme [Et 1, III (3.1.2)].

Lemme (3.2.2). *Sous les hypothèses précédentes, on a un isomorphisme*

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} (f_* f^*(\mathcal{F}))^G.$$

Soient $\overline{X}$ une compactification de X au-dessus de k et $j : X \hookrightarrow \overline{X}$ l'immersion ouverte correspondante. Par exactitude du foncteur $j_!$ on déduit de (3.2.2) des isomorphismes

(3.2.3) $$j_! \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} j_!(f_* f^* \mathcal{F})^G \simeq (j_! f_* f^* \mathcal{F})^G.$$

Le corps k étant séparablement clos, les groupes $H^i_{\text{ét},c}(X, \mathcal{F}_n)$ et $H^i_{\text{ét},c}(X, f_* f^* \mathcal{F}_n)$ sont des $\mathcal{V}^\sigma_n$-modules de type fini [SGA 4, XVII, 5.3.8] ; par suite les groupes $H^i_{\text{ét},c}(X, \mathcal{F})$ et $H^i_{\text{ét},c}(X, f_* f^* \mathcal{F})$ sont des $\mathcal{V}^\sigma$-modules de type fini, engendrés par tout sous-ensemble qui les engendre mod.π.

On achève la démonstration de (3.2) comme [Et 1, III, 3.1.1]. □

3.3. Soient X un k-schéma et $\mathcal{H}$ un $\mathcal{V}^\sigma_n$-module localement trivial sur SYNT(X). On considère le morphisme de topos annelés [E-LS 2, 5.3]

$$u = u^{(m)}_{X/\mathcal{V}_n-\text{SYNT}} : ((X/\mathcal{V}_n)^{(m)}_{\text{CRIS-SYNT}}, \mathcal{O}^{(m)}_{X/\mathcal{V}_n}) \longrightarrow (X_{\text{SYNT}}, \mathcal{V}^\sigma_n)$$

et on note

$$T^{(m)}(\mathcal{H}) := u^*(\mathcal{H}) = \mathcal{H} \otimes_{\mathcal{V}_n^\sigma} \mathcal{O}^{(m)}_{X/\mathcal{V}_n},$$

et

$$T^{(m)}(\mathcal{H})^{\mathrm{cris}} := u_*(T^{(m)}(\mathcal{H})) = u_*u^*(\mathcal{H}) \text{ [E-LS } 2, 1.11]$$

$$= \mathcal{H} \otimes_{\mathcal{V}_n^\sigma} u_*(\mathcal{O}^{(m)}_{X/\mathcal{V}_n}) = \mathcal{H} \otimes_{\mathcal{V}_n^\sigma} \mathcal{O}^{m-\mathrm{cris}}_{n,X}, \tag{3.3.1}$$

où l'on a posé $\mathcal{O}^{m-\mathrm{cris}}_{n,X} := u_*(\mathcal{O}^{(m)}_{X/\mathcal{V}_n})$.

Soient $i : Z \hookrightarrow X$ une immersion fermée et $j : U \hookrightarrow X$ l'immersion ouverte du complémentaire : j et i définissent respectivement des morphismes de topos [cf (1.1)]

$$j : U_{\mathrm{SYNT}} \longrightarrow X_{\mathrm{SYNT}} \ ,$$

$$i : Z_{\mathrm{SYNT}} \longrightarrow X_{\mathrm{SYNT}} \ ,$$

et même des morphismes de topos annelés

$$j_{\mathcal{V}} : (U_{\mathrm{SYNT}}, \mathcal{V}^\sigma_{n,U}) \longrightarrow (X_{\mathrm{SYNT}}, \mathcal{V}^\sigma_{n,X}) \tag{3.3.2}$$

$$i_{\mathcal{V}} : (Z_{\mathrm{SYNT}}, \mathcal{V}^\sigma_{n,Z}) \longrightarrow (X_{\mathrm{SYNT}}, \mathcal{V}^\sigma_{n,X}) \tag{3.3.3}$$

où $\mathcal{V}^\sigma_{n,U} = j^{-1}(\mathcal{V}^\sigma_{n,X}) \quad , \quad \mathcal{V}^\sigma_{n,Z} = i^{-1}(\mathcal{V}^\sigma_{n,X})$,

$\mathcal{V}^\sigma_{n,X}$ étant le faisceau d'anneaux $\mathcal{V}^\sigma_n$ sur X_{SYNT}.

On déduit alors de (1.4) l'existence de six foncteurs

$$\begin{tikzcd} {}_{\mathcal{V}^\sigma_{n,Z}}Z_{\mathrm{SYNT}} \arrow[r, "i_{\mathcal{V}*}"] & {}_{\mathcal{V}^\sigma_{n,X}}X_{\mathrm{SYNT}} \arrow[l, bend right, "i^*_{\mathcal{V}}"'] \arrow[l, bend left, "i^!_{\mathcal{V}}"] \arrow[r, "j^*_{\mathcal{V}}"] & {}_{\mathcal{V}^\sigma_{n,U}}U_{\mathrm{SYNT}} \arrow[l, bend right, "j_{\mathcal{V}!}"'] \arrow[l, bend left, "j_{\mathcal{V}*}"] \end{tikzcd} \tag{3.3.4}$$

Lemme (3.3.5). *Sous les hypothèses précédentes on a des isomorphismes de faisceaux sur les gros sites syntomiques :*

(3.3.5.1) $$j^{-1}\mathcal{O}^{m-\mathrm{cris}}_{n,X} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}^{m-\mathrm{cris}}_{n,U}$$

(3.3.5.2) $$i^{-1}\mathcal{O}^{m-\mathrm{cris}}_{n,X} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}^{m-\mathrm{cris}}_{n,Z}.$$

Démonstration. Comme $j^{-1}\mathcal{O}^{m-\mathrm{cris}}_{n,X}$ est le faisceau associé au préfaisceau qui à tout U-schéma U' associe

$$\begin{aligned}\mathcal{O}^{m-\mathrm{cris}}_{n,X}(U') &= \Gamma((U'/\mathcal{V}_n)^{(m)}_{\text{CRIS-SYNT}}, \mathcal{O}^{(m)}_{U'/\mathcal{V}n}) \text{ [E-LS 2, 1.10]}\\ &= \mathcal{O}^{m-\mathrm{cris}}_{n,U}(U'),\end{aligned}$$

on a bien (3.3.5.1). De même pour (3.3.5.2). □

Grâce au lemme (3.3.5) les morphismes de topos j et i ci-dessus induisent des morphismes de topos annelés

(3.3.6) $$j_{\mathcal{O}} : (U_{\mathrm{SYNT}}, \mathcal{O}^{m-\mathrm{cris}}_{n,U}) \longrightarrow (X_{\mathrm{SYNT}}, \mathcal{O}^{m-\mathrm{cris}}_{n,X})$$

(3.3.7) $$i_{\mathcal{O}} : (Z_{\mathrm{SYNT}}, \mathcal{O}^{m-\mathrm{cris}}_{n,Z}) \longrightarrow (X_{\mathrm{SYNT}}, \mathcal{O}^{m-\mathrm{cris}}_{n,X})$$

et six foncteurs

(3.3.8) $$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}^{m-\mathrm{cris}}_{n,Z} Z_{\mathrm{SYNT}} \arrow[r, "i_{\mathcal{O}*}"] & \mathcal{O}^{m-\mathrm{cris}}_{n,X} X_{\mathrm{SYNT}} \arrow[r, "j^*_{\mathcal{O}}"] \arrow[l, bend right, "i^*_{\mathcal{O}}"'] \arrow[l, bend left, "i^!_{\mathcal{O}}"] & \mathcal{O}^{m-\mathrm{cris}}_{n,U} U_{\mathrm{SYNT}} \arrow[l, bend right, "j_{\mathcal{O}!}"'] \arrow[l, bend left, "j_{\mathcal{O}*}"]
\end{tikzcd}.$$

En utilisant la description (1.4), ou le théorème (1.5) *(6.1)* on en déduit la proposition suivante :

Proposition (3.3.9). *Sous les hypothèses et notations de (3.3) on a :*

(1) *Si $\mathcal{G}$ est un $\mathcal{O}^{m-cris}_{n,U}$-module, alors on a un isomorphisme canonique*

$$j_{\mathcal{V}!}(\mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} j_{\mathcal{O}!}(\mathcal{G}).$$

(2) *Si $\mathcal{G}$ est un $\mathcal{V}^{\sigma}_{n,U}$-module, alors on a des isomorphismes canoniques*

$$j_{\mathcal{V}!}(\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{V}^{\sigma}_{n,U}} \mathcal{O}^{m-\mathrm{cris}}_{n,U}) \simeq j_{\mathcal{O}!}(\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{V}^{\sigma}_{n,U}} \mathcal{O}^{m-\mathrm{cris}}_{n,U})$$

$$\simeq j_{\mathcal{V}!}(\mathcal{G}) \otimes_{\mathcal{V}^\sigma_{n,X}} j_{\mathcal{V}!}(\mathcal{O}^{m-\mathrm{cris}}_{n,U}) \simeq j_{\mathcal{V}!}(\mathcal{G}) \otimes_{\mathcal{V}^\sigma_{n,X}} j_{\mathcal{O}!}(\mathcal{O}^{m-\mathrm{cris}}_{n,U})$$

$$\simeq j_{\mathcal{V}!}(\mathcal{G}) \otimes_{\mathcal{V}^\sigma_{n,X}} \mathcal{O}^{m-\mathrm{cris}}_{n,X}.$$

Les formules du (2) sont à comparer à celles de [SGA 4, IV, prop 12.11 (b)].

Supposons à présent que $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{V}^\sigma_n$-module localement trivial sur SYNT(U) : $\mathcal{F}$ étant localement trivial, le morphisme $F^* : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^{(q)} = F_X^{-1}(\mathcal{F})$ est un isomorphisme ; on pose $F = F^{*-1} : \mathcal{F}^{(q)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}$ et $\phi_U = T^{(m)}(F) : T^{(m)}(\mathcal{F})^{(q)} = T^{(m)}(\mathcal{F}^{(q)}) \xrightarrow{\sim} T^{(m)}(\mathcal{F})$ qui munit $T^{(m)}(\mathcal{F})$ d'une structure de F-m-cristal localement trivial [E-LS 2, 5.3].

On note encore $\phi_U : T^{(m)}(\mathcal{F})^{\mathrm{cris}} \to T^{(m)}(\mathcal{F})^{\mathrm{cris}}$ l'homomorphisme obtenu en composant ϕ_U^{cris} avec $F^* : T^{(m)}(\mathcal{F})^{\mathrm{cris}} \to T^{(m)}(\mathcal{F})^{\mathrm{cris}(q)}$ [E-LS 2, 5.2]. Alors la suite exacte de [E-LS 2, théo 5.5] s'interprète, via (3.3.1), comme une suite exacte sur SYNT(U) :

(3.3.10) $$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow u_*\, u^*(\mathcal{F}) \underset{1-\phi_U}{\longrightarrow} u_*\, u^*(\mathcal{F}) \longrightarrow 0$$

ou encore

(3.3.11) $$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{V}^\sigma_n} \mathcal{O}^{m-\mathrm{cris}}_{n,U} \underset{1-\phi_U}{\longrightarrow} \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{V}^\sigma_n} \mathcal{O}^{m-\mathrm{cris}}_{n,U} \longrightarrow 0\ .$$

En lui appliquant le foncteur exact $j_{\mathcal{V}!}$ [théo 1.5], on obtient encore une suite exacte, ce qui, compte tenu de (3.3.9), établit le théorème suivant :

Théorème (3.3.12). *Sous les notations de (3.3), si $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{V}^\sigma_n$-module localement trivial sur SYNT(U), alors on a des suites exactes de $\mathcal{V}^\sigma_n$-modules sur SYNT(X) :*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & j_{\mathcal{V}!}\, \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d, equal] & j_{\mathcal{O}!}(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{V}^\sigma_n} \mathcal{O}^{m-\mathrm{cris}}_{n,U}) \arrow[r, "1-\phi"'] \arrow[d, "\simeq"] & j_{\mathcal{O}!}(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{V}^\sigma_n} \mathcal{O}^{m-\mathrm{cris}}_{n,U}) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & j_{\mathcal{V}!}\, \mathcal{F} \arrow[r] & j_{\mathcal{V}!}(\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{V}^\sigma_n} \mathcal{O}^{m-\mathrm{cris}}_{n,X} \arrow[r, "1-\phi"'] & j_{\mathcal{V}!}(\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{V}^\sigma_n} \mathcal{O}^{m-\mathrm{cris}}_{n,X} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

où $\phi = j_{\mathcal{V}!}(\phi_U)$.

Les suites exactes du théorème (3.3.12) vont nous permettre en passant à la cohomologie dans le théorème suivant de relier cohomologie étale et cohomologie rigide.

Théorème (3.3.13). *On suppose le corps k parfait. Soient X un k-schéma séparé de type fini, $\mathcal{F}_{\mathbb{Q}}$ un K^{σ}-faisceau lisse sur X et $E_K \in F^a$-Isoc$(X/K)^{\circ}$ le F-isocristal convergent associé à $\mathcal{F}_{\mathbb{Q}}$ [E-LS 2; 5.6] et on suppose que E_K provient de $E_K^{\dagger} \in F^a$-Isoc$^{\dagger}(X/K)^{\circ}$ par le foncteur d'oubli F^a-Isoc$^{\dagger}(X/K)^{\circ} \to F^a$-Isoc$(X/K)^{\circ}$. On note $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un $\mathcal{V}^{\sigma}$-faisceau lisse associé à $\mathcal{F}_{\mathbb{Q}}$ et $E_n^{m-cris} = T^{(m)}(\mathcal{F}_n)^{cris}$ [cf (3.3.1)].*
Alors on a :

(1) *Il existe un isomorphisme canonique*

$$R\Gamma_{\mathrm{rig},c}(X/K, E_K^{\dagger}) = R\varprojlim_m[(R\varprojlim_n R\Gamma_{\mathrm{synt},c}(X, E_n^{m-\mathrm{cris}})) \otimes \mathbb{Q}].$$

(2) *Si de plus k est algébriquement clos, il existe, pour tout entier $i \geqslant 0$, une suite exacte courte*

$$O \to H^i_{\text{ét},c}(X, \mathcal{F}_{\mathbb{Q}}) \to H^i_{\mathrm{rig},c}(X/K, E_K^{\dagger}) \underset{1-\phi}{\longrightarrow} H^i_{\mathrm{rig},c}(X/K, E_K^{\dagger}) \to 0.$$

Démonstration.
Prouvons le (1). Comme la cohomologie rigide à supports compacts ne dépend que du schéma réduit sous-jacent à X, on peut supposer X réduit. On va faire une récurrence sur la dimension de X.

Si dim $X = 0$, alors $X = \bigcup_{\text{finie}} \mathrm{Spec} A_i$ où A_i est artinien [Eis., cor 9.1] car X est de type fini sur k, et A_i est un produit fini $\prod_j A_{i,m_j}$ d'anneaux artiniens locaux réduits (X est réduit) : ainsi A_{i,m_j} est un corps [Bour, A VIII, § 6, n° 4, prop 9] k_{ij} extension finie du corps parfait k [Eis, cor 2.15]. En particulier X est fini étale sur k, et alors l'assertion du théorème est prouvée dans [E-LS 2, prop 3.11].

Si dim $X \geqslant 1$, il existe, puisque k est parfait et X réduit, un ouvert non vide $U \hookrightarrow X$ qui est lisse sur k, de fermé complémentaire Z tel que dim $Z <$ dim X. Comme les deux foncteurs $R\Gamma_{\mathrm{rig},c}(X/K, -)$ et $R\varprojlim_m [(R\varprojlim_n R\Gamma_{\mathrm{synt},c}(X, (-)_n^{m-\mathrm{cris}})) \otimes \mathbb{Q})]$ donnent lieu à des triangles distingués faisant intervenir X, U et Z on est ramené à prouver le théorème pour U. Donc on peut supposer X lisse connexe et aussi $K' = K$ avec $e \leqslant p-1$, avec $\mathcal{F}$ un $\mathcal{V}^{\sigma}$-faisceau lisse sur X, associé à un F-cristal unité E sur $X/\mathcal{V}$, d'isocristal convergent unité E_K par [B, (2.4.2)] supposé provenir de $E_K^\dagger \in F^a$-Isoc$(X/K)^\circ$.

Notons $\overline{X}$ une compactification de X sur k. D'après le théorème de monodromie finie "générique" de Tsuzuki [Tsu 2, theo 3.1] il existe un k-schéma projectif et lisse $\overline{X}'$, un k-morphisme propre surjectif $\overline{w} : \overline{X'} \to \overline{X}$ génériquement étale, tel qu'en posant $X' = \overline{w}^{-1}(X)$, $j' : X' \hookrightarrow \overline{X'}$ l'immersion ouverte, il existe un unique $N^\dagger \in F^a$-Isoc$^\dagger(\overline{X'}/K)^\circ$ avec $\overline{w}^*(E_K^\dagger) \simeq (j')^\dagger(N^\dagger)$.

Notons $U \hookrightarrow X$ un ouvert dense tel que la restriction $w : U' = U \times_{\overline{X}} \overline{X'} \to U$ de $\overline{w}$ soit finie étale : quitte à rétrécir U on peut supposer U affine et intégralement clos, de même pour U'. Puisque U et U' sont connexes il existe un morphisme fini étale $s : U'' \to U'$ tel que le composé $f : w \circ s : U'' \to U$ soit fini étale galoisien de groupe noté G [Mi, I, Rk 5.4]. Désignons par $\overline{X''}$ la fermeture intégrale de $\overline{X'}$ dans U'' : on obtient un diagramme commutatif à carrés cartésiens

$$\begin{tikzcd}
U'' \arrow[rr, hook, "j''"] \arrow[d, "s"] \arrow[dd, bend right=60, "f"'] & & \overline{X''} \arrow[d, "\overline{s}"] \\
U' \arrow[r, hook] \arrow[d, "w"] & X' \arrow[r, hook] \arrow[d] & \overline{X'} \arrow[d, "\overline{w}"] \\
U \arrow[r, hook] \arrow[rr, bend right, "j_U"'] & X \arrow[r, hook, "j"] & \overline{X}
\end{tikzcd}$$

où $\overline{s}$ est un morphisme fini et les flèches horizontales sont des immersions ouvertes : en particulier $\overline{X''}$ est une compactification de U''. On note $\overline{Z}$ l'adhérence schématique de Z dans $\overline{X}$ et $j_Z : Z \hookrightarrow \overline{Z}$ l'immersion ouverte dominante.

Puisque $\overline{X'}$ est propre et lisse sur k, il existe, d'après (3.3.13) un F-cristal unité M sur $\overline{X'}$ tel que $N^\dagger \simeq M^{an}$. Posons $\overline{\mathcal{M}} = \overline{s}^*_{\mathrm{CRIS}}(M)$, $\mathcal{M} = j''^*_{\mathrm{CRIS}}(\overline{\mathcal{M}})$; d'après [B, (2.42)] $\mathcal{M}$ est isogène à $f^*_{\mathrm{CRIS}}(E_{|U})$, i.e. il existe un entier $r \geqslant 0$ et des morphismes

$$\alpha : \mathcal{M} \longrightarrow f^*_{\mathrm{CRIS}}(E_{|U}),$$

$$\beta : f^*_{\mathrm{CRIS}}(E_{|U}) \longrightarrow \mathcal{M},$$

tels que $\alpha \circ \beta = p^r$ et $\beta \circ \alpha = p^r$. On notera $\overline{\mathcal{M}}_K$ le F-isocristal (sur)convergent sur $\overline{X''}$ associé à $\overline{\mathcal{M}}$ et $\mathcal{M}_K^\dagger = j''^\dagger(\overline{\mathcal{M}}_K)$. D'après [B-M 1, cor du théo 6] le

F-cristal unité $\overline{\mathcal{M}}$ est le cristal de Dieudonné d'un groupe p-divisible étale, dont le $\mathcal{V}^\sigma$-faisceau lisse associé sera noté $\overline{\mathcal{G}} = (\overline{\mathcal{G}}_n)_{n\in\mathbb{N}}$; on pose $\mathcal{G} = j''^*(\overline{\mathcal{G}})$.

L'isogénie α (resp β) fournit une isogénie $\alpha_{\mathcal{G}} : \mathcal{G} \to f^*(\mathcal{F}_{|U})$ (resp $\beta_{\mathcal{G}} : f^*(\mathcal{F}_{|U}) \to \mathcal{G}$) telle que $\alpha_{\mathcal{G}} \circ \beta_{\mathcal{G}} = p^r$ et $\beta_{\mathcal{G}} \circ \alpha_{\mathcal{G}} = p^r$.

L'isogénie α (resp β) fournit, par la construction de Berthelot [B, (2.4.2)], un isomorphisme sur les F-isocristaux convergents associés

$$\alpha_K : \mathcal{M}_K \xrightarrow{\sim} f^*_{\mathrm{rig}}(E_{K|U})$$

$$(\text{resp } \beta_K : f^*_{\mathrm{rig}}(E_{K|U}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_K).$$

D'après [Et 2, théo 5] l'isomorphisme α_K (resp. β_K) se relève de manière unique en un isomorphisme

$$\alpha_K^\dagger : \mathcal{M}_K^\dagger \xrightarrow{\sim} f^*_{\mathrm{rig}}(E^\dagger_{K|U})$$

$$(\text{resp } \beta_K^\dagger : f^*_{\mathrm{rig}}(E^\dagger_{K|U}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_K^\dagger);$$

de même l'action de G sur $f^*_{\mathrm{rig}}(E_{K|U})$ se relève de manière unique à $f^*_{\mathrm{rig}}(E^\dagger_{K|U})$.

D'autre part, par le théorème (3.3.12), on a un morphisme de suites exactes sur $\mathrm{SYNT}(\overline{X''})$

$$\begin{array}{ccccccccc}
(S_1)\ 0 & \longrightarrow & j_!f^*(\mathcal{F}_{n|U}) & \longrightarrow & j_!f^*_{\mathrm{CRIS}}(E_{|U})_n^{m-\mathrm{cris}} & \xrightarrow{1-\phi} & j_!f^*_{\mathrm{CRIS}}(E_{|U})_n^{m-\mathrm{cris}} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle j''_!(\beta_{\mathcal{G}})_n} & & \downarrow{\scriptstyle j''_!(\beta)_n^m} & & \downarrow{\scriptstyle j''_!(\beta)_n^m} & & \\
(S_2)\ 0 & \longrightarrow & j''_!\mathcal{G}_n & \longrightarrow & j''_!\mathcal{M}_n^{m-\mathrm{cris}} & \xrightarrow{1-\phi} & j''_!\mathcal{M}_n^{m-\mathrm{cris}} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Le groupe G agit de manière équivariante sur la suite exacte (S_1), donc sur le triangle distingué $\mathcal{C}''(S_1)$ obtenu en lui appliquant le foncteur

$$\mathcal{C}'' := R\varprojlim_m\{(R\varprojlim_n R\Gamma(\overline{X''}_{\mathrm{SYNT},}-)) \otimes \mathbb{Q}\}.$$

Comme $\mathcal{C}''(j''_!(\beta)_n^m) =: \tilde{\beta}$ est un isomorphisme, et de même en remplaçant β par α, ou $\alpha_{\mathcal{G}}$, $\beta_{\mathcal{G}}$, le triangle distingué $\mathcal{C}''(S_2)$ obtenu en appliquant $\mathcal{C}''$ à (S_2) est aussi G-équivariant par transport de structure par ces isomorphismes : compte tenu de [E-LS 2, (3.11)] ce morphisme de triangles s'identifie à

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
(3.3.13.1)\ R\Gamma_{\text{ét},c}(U'', f^*(\mathcal{F}_{|U}))\otimes\mathbb{Q} \arrow[r] \arrow[d, "R\Gamma_{\text{ét},c}(\beta_{\mathcal{G}})\otimes\mathbb{Q}"', "\simeq"] & R\Gamma_{\text{rig},c}(U'', f^*_{\text{rig}}(E^\dagger_{K_{|U}})) \arrow[r, "1-\phi"] \arrow[d, "R\Gamma_{\text{rig},c}(\beta^\dagger_K)"', "\simeq"] & R\Gamma_{\text{rig},c}(U'', f^*_{\text{rig}}(E^\dagger_{K_{|U}})) \arrow[d, "R\Gamma_{\text{rig},c}(\beta^\dagger_K)"', "\simeq"] \\
(3.3.13.2)\quad R\Gamma_{\text{ét},c}(U'', \mathcal{G})\otimes\mathbb{Q} \arrow[r] & R\Gamma_{\text{rig},c}(U'', \mathcal{M}^\dagger_K) \arrow[r, "1-\phi"'] & R\Gamma_{\text{rig},c}(U'', \mathcal{M}^\dagger_K).
\end{tikzcd}$$

En prenant les points fixes sous G dans l'isomorphisme

$$R\Gamma_{\text{rig},c}(U'', f^*_{\text{rig}}(E^\dagger_{K|U})) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}''(j''_! f^*_{\text{CRIS}}(E_{|U})^{m-\text{cris}}_n)$$

et en prouvant à la manière du théorème (3.2) que les points fixes sous G du membre de droite s'identifient à

$$\mathcal{C}(j_{U!}\ E^{m-\text{cris}}_{|U_n}) := R\varprojlim_m\{(R\varprojlim_n R\Gamma(\overline{X}_{\text{SYNT}}, j_{U!}\ E^{m-\text{cris}}_{|U_n}))\otimes\mathbb{Q}\}$$

on a prouvé le (1) du théorème (3.3.13) pour U grâce à [Et 3, IV, théo (4.2)] ou [Et 6, théo (4.2)].

On a donc deux triangles distingués reliés par des flèches qui sont des isomorphismes

$$\begin{tikzcd}
R\Gamma_{\text{rig},c}(U, E^\dagger_{K_{|U}}) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & R\Gamma_{\text{rig},c}(X, E^\dagger_K) \arrow[r] & R\Gamma_{\text{rig},c}(Z, E^\dagger_{K_{|Z}}) \arrow[d, "\simeq"] \\
\mathcal{C}(j_{U!}\ E^{m-\text{cris}}_{|U_n}) \arrow[r] & \mathcal{C}(j_!\ E^{m-\text{cris}}_n) \arrow[r] & \mathcal{C}(j_{Z!}\ E^{m-\text{cris}}_{|Z_n})\ ;
\end{tikzcd}$$

d'après les axiomes des catégories triangulées [H, I, §1] on peut compléter par un isomorphisme au milieu.
Ceci achève la preuve du (1) du théorème.

Prouvons à présent le (2). Comme k est algébriquement clos les points fixes sous G de $R\Gamma_{\text{ét},c}(U'', f^*(\mathcal{F}_{|U}))\otimes\mathbb{Q}$ sont égaux à $R\Gamma_{\text{ét},c}(U, \mathcal{F}_{|U})\otimes\mathbb{Q}$. Par suite les points fixes sous G du triangle distingué (3.3.13.1) G-équivariant fournissent une suite exacte longue de cohomologie

$$(3.3.13.3) \to H^i_{\text{ét},c}(U, \mathcal{F}_{|U})\otimes\mathbb{Q} \to H^i_{\text{rig},c}(U/K, E^\dagger_{K_{|U}}) \underset{1-\phi}{\to} H^i_{\text{rig},c}(U/K, E^\dagger_{K_{|U}}) \to .$$

Les groupes de cohomologie rigide $H^i_{\text{rig},c}(U/K, E^\dagger_{K_{|U}})$ étant de dimension finie sur K [Tsu 1, theo 6.1.2], et k algébriquement clos, ces suites exactes se scindent en suites exactes courtes [Iℓ ; II, lemme 5.6]. Notons $Z \hookrightarrow X$ l'immersion du fermé complémentaire à U (rappelons que X est supposé réduit). Si dim $Z = 0$, Z est fini étale sur k et on a une suite analogue à (3.3.13.3) pour Z : par récurrence sur la dimension de X on peut donc supposer l'existence de suites exactes courtes telles que (3.3.13.3) pour U et pour Z. En particulier on a trois triangles distingués horizontaux reliés par des flèches induites par (3.3.13.3) appliqué à U et Z :

(3.3.13.4)
$$\begin{tikzcd}
R\Gamma_{\text{ét},c}(U,\mathcal{F}_{U\mathbb{Q}}) \arrow[r] \arrow[d] & R\Gamma_{\text{ét},c}(X,\mathcal{F}_{\mathbb{Q}}) \arrow[r] & R\Gamma_{\text{ét},c}(Z,\mathcal{F}_{Z\mathbb{Q}}) \arrow[d] \\
R\Gamma_{\text{rig},c}(U,E^{\dagger}_{K|U}) \arrow[r] \arrow[d, "1-\phi_U"'] & R\Gamma_{\text{rig},c}(X,E^{\dagger}_{K}) \arrow[r] \arrow[d, "1-\phi"'] & R\Gamma_{\text{rig},c}(Z,E^{\dagger}_{K|Z}) \arrow[d, "1-\phi_Z"] \\
R\Gamma_{\text{rig},c}(U,E^{\dagger}_{K|U}) \arrow[r] & R\Gamma_{\text{rig},c}(X,E^{\dagger}_{K}) \arrow[r] & R\Gamma_{\text{rig},c}(Z,E^{\dagger}_{K|Z});
\end{tikzcd}$$

par les axiomes des catégories triangulées [H, I, § 1] on peut compléter par un morphisme $R\Gamma_{\text{ét},c}(X,\mathcal{F}_{\mathbb{Q}}) \to R\Gamma_{\text{rig},c}(X,E^{\dagger}_{K})$. Les suites exactes courtes (3.3.13.3) pour U et Z fournissent alors l'analogue pour X, d'où le (2) du théorème (3.3.13).

Autre démonstration du (2). Une autre méthode consiste à appliquer le foncteur $\mathcal{C}$ à la suite exacte du théorème (3.3.12)

(3.3.13.5) $0 \to j_!\,\mathcal{F}_n \to j_!\,(\mathcal{F}_n \otimes_{\mathcal{V}_n^\sigma} \mathcal{O}_{n,X}^{m-\text{cris}}) \underset{1-\phi}{\to} j_!\,(\mathcal{F}_n \otimes_{\mathcal{V}_n^\sigma} \mathcal{O}_{n,X}^{m-\text{cris}}) \to 0$

où l'on remarque que $E_n^{m-\text{cris}} = \mathcal{F}_n \otimes_{\mathcal{V}_n^\sigma} \mathcal{O}_{n,X}^{m-\text{cris}}$. Par le (1) du théorème le triangle distingué ainsi obtenu s'identifie au triangle distingué

$$R\Gamma_{\text{ét},c}(X,\mathcal{F}_{\mathbb{Q}}) \longrightarrow R\Gamma_{\text{rig},c}(X,E^{\dagger}_{K}) \underset{1-\phi}{\to} R\Gamma_{\text{rig},c}(X,E^{\dagger}_{K}).$$

La suite exacte longue de cohomologie se scinde alors en suites exactes courtes par le même argument que ci-dessus. □

Remarque (3.3.14). En supposant seulement que k contient $\mathbb{F}_q$ [cf (3.0)] et que $\mathcal{F}_n$ est un $\mathcal{V}_n^\sigma$-module localement trivial sur SYNT(X), on pose encore

$$E_n^{m-\text{cris}} = T^{(m)}(\mathcal{F}_n)^{\text{cris}} = \mathcal{F}_n \otimes_{\mathcal{V}_n^\sigma} \mathcal{O}_{n,X}^{m-\text{cris}}.$$

En appliquant le foncteur $R\Gamma(\overline{X}_{\text{SYNT},-})$ à la suite exacte (3.3.13.5), on obtient un triangle distingué

$$R\Gamma_{\text{ét},c}(X,\mathcal{F}_n) \longrightarrow R\Gamma_{\text{synt},c}(X,E_n^{m-\text{cris}}) \underset{1-\phi}{\longrightarrow} R\Gamma_{\text{synt},c}(X,E_n^{m-\text{cris}}).$$

Références

[B] P. Berthelot : *Cohomologie rigide et cohomologie rigide à supports propres*, Prépublication 93-03 de Rennes (1996).

[B-M 1] P. Berthelot, W. Messing : *Théorie de Dieudonné cristalline I*, Astérisque 63, (1979) 17-38.

[B-M 2] P. Berthelot, W. Messing : *Théorie de Dieudonné cristalline III : théorèmes d'équivalence et de pleine fidélité*, The Grothendieck Festschrift, vol. 1, Progress in Math. 86, Birkhaüser (1990).

[Bour] N. Bourbaki : *Algèbre* [A] chap. I à VII ; *Algèbre commutative* [AC] chap. I à X.

[EGA] A. Grothendieck, J. Dieudonné : *Eléments de Géométrie Algébrique* : Chap. I, Springer Grundlehren 166 ; Chap. II, III, IV, Pub. Math. IHES n° 8, 11, 17, 20, 24, 28, 32.

[Eis] D. Eisenbud : *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Math. 150, Springer, (1996).

[Et 1] J.-Y. Etesse : *Rationalité et valeurs de fonctions L en cohomologie cristalline*, Annales Inst. Fourier, t. 38, fasc. 4, (1988), 33-92.

[Et 2] J.-Y. Etesse : *Descente étale des F-isocristaux surconvergents et rationalité des fonctions L de schémas abéliens*, Annales Scient. Ec. Norm. Sup., 4ème série, t. 35, (2002), 575-603.

[Et 3] J.-Y. Etesse : *Images directes et fonctions L en cohomologie rigide*, (mars 2008) hal.00262316/ arXiv :0803.1580.

[Et 4] J.-Y. Etesse : *Images directes I : Espaces rigides analytiques et images directes*, hal-00425909.

[Et 5] J.-Y. Etesse : *Images directes II : F-isocristaux convergents*, hal-00425919.

[Et 6] J.-Y. Etesse : *Images directes III : F-isocristaux surconvergents*, hal-00425922.

[Et 7] J.-Y. Etesse : *Fonctions L en cohomologie rigide*, preprint.

[E-LS 1] J.-Y. Etesse, B. Le Stum : *Fonctions L associées aux F-isocristaux surconvergents I : Interprétation cohomologique*, Math. Annalen 296, (1993), 557-576.

[E-LS 2] J.-Y. Etesse, B. Le Stum : *Fonctions L associées aux F-isocristaux surconvergents II : Zéros et pôles unités*, Invent. Math. 127, (1997), 1-31.

[F-M] J.-M. Fontaine, W. Messing : *p-adic- periods and p-adic etale cohomology*, Contemporary Math. 67, Providence, AMS, (1987), 179-207.

[H] R. Hartshorne : *Residues and Duality*, Lecture Notes in Math. 20, Springer (1966).

[Iℓ] L. Illusie : *Complexe de De Rham-Witt et cohomologie cristalline*, Annales Scient. Ec. Norm. Sup., 4ème série, t. 12, (1979), 501-661.

[Mi] J.-S. Milne : *Etale cohomology*, Princeton University Press (1980).

[SGA 1] A. Grothendieck : *Revêtements étales et goupe fondamental*, Lecture Notes in Math. 224, Springer (1971).

[SGA 3] M. Demazure, A. Grothendieck : *Schémas en groupes*, Lecture Notes in Math. 151, 152, 153, Springer (1970).

[SGA 4] M. Artin, A. Grothendieck, J.-L. Verdier : *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, Lecture Notes in Math. 269, 270, 305, Springer (1972, 1973).

[Tsu 1] N. Tsuzuki : *On the Gysin isomorphism of rigid geometry*, Hiroshima Math. J. 29 (3), (1999), 479-527.

[Tsu 2] N. Tsuzuki : *Morphisms of F-isocrystals and the finite monodromy theorem for unit-root F-isocrystals*, Duke Math. J. 111 (2002), 385-418.